Liceo scientifico e opzione scienze applicate

6 Preso un punto C su una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, sia M il punto medio dell'arco $\widehat{BC}$. Determinare il valore massimo che può assumere l'area del quadrilatero $ABMC$.

6 Disegniamo la semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$, di centro O, con i punti C e M su di essa e il quadrilatero $ABMC$.

Scegliamo come incognita l'angolo $x = B\widehat{A}C$. Per il teorema dell'angolo al centro e alla circonferenza, l'angolo $B\widehat{O}C$ è il doppio di $B\widehat{A}C$, perché insiste sullo stesso arco $\widehat{BC}$. D'altra parte, essendo gli archi $\widehat{BM}$ e $\widehat{MC}$ uguali, si può concludere che $B\widehat{O}M = M\widehat{O}C = x$. Per differenza di angoli, risulta $A\widehat{O}C = \pi - 2x$.

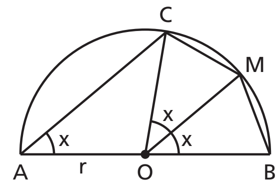

Figura 7

I valori che può assumere x affinché $ABMC$ sia un quadrilatero non degenere sono $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Nel caso $x = 0$, i punti B, M e C coincidono, e il quadrilatero degenera nel segmento AB. Nel caso $x = \frac{\pi}{2}$, risulta $C \equiv A$ e la figura degenera nel triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa AB.

Ricordiamo che l'area di un triangolo di lati a e b, con angolo x compreso tra essi, è uguale a $\frac{ab \sin x}{2}$.

Se chiamiamo $\mathscr{A}(x)$ la funzione che descrive l'area di $ABMC$ in funzione dell'angolo x, otteniamo:

$$\mathscr{A}(x) = \text{area}_{BMO} + \text{area}_{MOC} + \text{area}_{AOC} = 2 \cdot \frac{r^2}{2} \sin x + r^2 \sin x \cos x = r^2 (\sin x + \sin x \cos x).$$

Per trovare il massimo di $\mathscr{A}(x)$, calcoliamo la derivata prima:

$$\mathscr{A}'(x) = r^2 (\cos x - \sin^2 x + \cos^2 x) = r^2 (2\cos^2 x + \cos x - 1).$$

Calcoliamo i valori di x per cui la derivata si annulla:

$$\mathscr{A}'(x) = 0 \rightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$$

Poniamo $t = \cos x$:

$$2t^2 + t - 1 = 0 \rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \rightarrow t_1 = -1 \vee t_2 = \frac{1}{2}.$$

$\cos x = -1 \rightarrow x = \pi$, non accettabile perché deve essere $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$, unica soluzione con $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Studiamo il segno di $\mathscr{A}'(x)$.

Notiamo che possiamo scrivere $\mathscr{A}'(x)$ nella forma $\mathscr{A}'(x) = 2r^2 (\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$.

Per $0 < x < \frac{\pi}{2}$, il segno di $\mathscr{A}'(x)$ è dato dal segno del fattore $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$.

Da $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{3}$ e $\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) < 0$ per $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ segue che $x = \frac{\pi}{3}$ è un punto di massimo.

Il valore massimo dell'area di $ABMC$ è dunque:

$$\mathscr{A}\left(\frac{\pi}{3}\right) = r^2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3} \cdot r^2 \simeq 1,299 r^2.$$

Osserviamo che per $x = \frac{\pi}{3}$ il quadrilatero è un trapezio isoscele di base maggiore AB e base minore MC, e che è la metà di un esagono regolare, perché $\overline{BM} = \overline{MC} = \overline{CA} = r$.

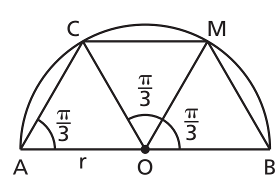

Figura 8